Задачи по курсу "Случайные процессы"
студента группы 417
Игоря Громова

Задача 1 (лекция 27.02.2006)

Доказать, что для функций Хаара $H_n(t),\ t \in [0,1],\ n = 0, 1, 2, \dots$ верно равенство

$$\int\limits_0^1 H_k(t) \cdot H_m(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{если } k = m \\ 0, & \text{если } k \neq m \end{cases}$$

Доказательство: напомним общий вид функций Хаара:
для $2^n \le k < 2^{n+1}$

$$H_k(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n}{2^n} \le t \le \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} < t \le \frac{k-2^n+1}{2^n} \\ 0, & \text{в остальных точках} \end{cases}$$

Обозначим $a = \dfrac{k-2^n}{2^n}$, $b = \dfrac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n}$, $c = \dfrac{k-2^n+1}{2^n}$.

1). Пусть $k = m$. Тогда

$$\int\limits_0^1 H_k(t) \cdot H_m(t) dt = \int\limits_0^1 H_k^2(t) dt =$$

$$= \int\limits_0^a H_k^2(t) dt + \int\limits_a^b H_k^2(t) dt + \int\limits_b^c H_k^2(t) dt + \int\limits_c^1 H_k^2(t) dt =$$

$$= \int\limits_a^b H_k^2(t) dt + \int\limits_b^c H_k^2(t) dt =$$

$$= \frac{(k-2^n+\frac{1}{2}) - (k-2^n)}{2^n} \cdot 2^n + \frac{(k-2^n+1) - (k-2^n+\frac{1}{2})}{2^n} \cdot 2^n = 1$$

2). Пусть $k \neq m$. Не ограничивая общности будем считать, что $k < m$. Поскольку $k, m \in \mathbb{N}$, то можно записать m как $m = k + l,\ l \in \mathbb{N}$. Отсюда наглядно видно, что сегменты

$$\Delta_k = \left[\frac{k-2^n}{2^n},\ \frac{k-2^n+1}{2^n}\right] \ \text{ и } \ \Delta_m = \left[\frac{k+l-2^n}{2^n},\ \frac{k+l-2^n+1}{2^n}\right],$$

на которых функции Хаара $H_k(t)$ и $H_m(t)$ соответственно отличны от нуля, пересекаются не более, чем в одной точке (т.е. на множестве меры 0). Следовательно, на всем сегменте $[0,1]$, за исключением множества меры 0, хотя бы один из сомножителей подынтегральной функции (а значит, и вся подынтегральная функция) обращается в 0. Интеграл от функции, равной 0 почти всюду на сегменте $[0,1]$, равен 0.

Утверждение доказано.

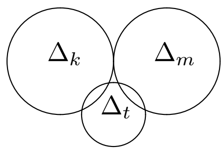
Задача 2 (лекция 27.02.2006)

Пусть $Q_k(t) = \int\limits_0^t H_k(u)du,\ t \in [0,1]$,
где $H_k(u),\ u \in [0,1],\ k = 0,1,2,\ldots$ - функция Хаара.

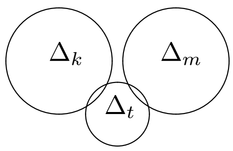
Доказать, что $Q_k(t) \cdot Q_m(t) = 0$ для $k \neq m,\ \ 2^n \leq k,m < 2^{n+1}$.

Доказательство: в задаче 1 было показано, что сегменты Δ_k и Δ_m, на которых функции Хаара $H_k(t)$ и $H_m(t)$ соответственно отличны от нуля, пересекаются не более, чем в одной точке (т.е. на множестве меры 0) при $(k \neq m)$.

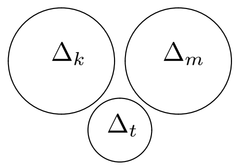
Обозначим отрезок $[0,t]$ как Δ_t. Учитывая результаты задачи 1, можно утверждать, что взаимное расположение отрезков $\Delta_k,\ \Delta_m,\ \Delta_t$ можно схематически изобразить следующим образом (ниже приведены не все варианты взаимного расположения):



, либо



, либо



Здесь существенно то, что пересечения отрезков Δ_k и Δ_m с отрезком Δ_t *не могут одновременно иметь ненулевую меру*. Следовательно, всегда либо $H_k(u)$, либо $H_m(u)$ обращается в 0 на области интегрирования Δ_t. Это, в свою очередь, влечет равенство нулю соответствующего интеграла (в наших обозначениях - функции $Q_j(t)$).

Таким образом, всегда один из сомножителей в произведении $Q_k(t) \cdot Q_m(t)$, $k \neq m$ равняется нулю. А значит, $Q_k(t) \cdot Q_m(t) = 0$ для $k \neq m,\ \ 2^n \leq k,m < 2^{n+1}$.

Утверждение доказано.

Задача 3 (лекция 27.03.2006)

Доказать неравенство

$$\left|e^{i\alpha\lambda}-e^{i\beta\lambda}\right| \le |\lambda|\cdot|\beta-\alpha|$$

Доказательство: не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $\beta>\alpha$. Проведем преобразования левой части неравенства:

$$\left|e^{i\alpha\lambda}-e^{i\beta\lambda}\right| = \left|i\lambda\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda z}dz\right| = |i||\lambda|\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{i\lambda z}dz\right| \le |\lambda|\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|e^{i\lambda z}\right|dz =$$

$$= |\lambda|\int\limits_{\alpha}^{\beta}dz = |\lambda|(\beta-\alpha).$$

Утверждение доказано.

Задача 4 (лекция 27.03.2006)

Доказать, что отображение $(f,g)=\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$, где $f(t),g(t)\in L_2(0,1)$ есть скалярное произведение в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство: достаточно проверить выполнение аксиом скалярного произведения.

$\forall f(t),g(t),h(t)\in L_2(0,1),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

1. $(f,g)=(g,f)$. Эта аксиома выполнена, т.к. значение интеграла Лебега не зависит от порядка сомножителей в подынтегральной функции.

2. $(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$. Эта аксиома выполнена в силу аддитивности интеграла. Действительно,

$$\int\limits_0^1(f(u)+g(u))h(u)du = \int\limits_0^1(f(u)h(u)+g(u)h(u))du = \int\limits_0^1 f(u)h(u)du+\int\limits_0^1 g(u)h(u)du$$

3. $(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$. Эта аксиома выполнена в силу свойств интеграла Лебега (возможности вынесения константы из-под знака интеграла).

4. $(f,f)\ge 0$, причем $(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$. Выполнение этой аксиомы также следует из свойств интеграла Лебега: интеграл от неотрицательной

функции, не обращающейся в 0 на всем отрезке $[0,1]$, за исключением, быть может, множества меры 0, положителен. Интеграл Лебега от функции, равной 0 всюду на отрезке $[0,1]$, равен 0.

Итак, для рассматриваемого отображения выполнены все аксиомы скалярного произведения. Следовательно, оно является скалярным произведением в пространстве $L_2(0,1)$.

Утверждение доказано полностью.

Задача 5 (лекция 27.03.2006)

Доказать, что скалярное произведение в произвольном гильбертовом пространстве есть непрерывная функция своих аргументов.

Доказательство: напомним, что норма в гильбертовом пространстве H определена как $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$.
Пусть даны две сходящиеся последовательности элементов гильбертова пространства $H : \{x_n\}$ и $\{y_m\}$. Сходимость в гильбертовом пространстве H означает, что $\exists\, x, y \in H : \|x_n - x\| -_{n\to\infty} \to x,\ \|y_m - y\| -_{m\to\infty} \to y$.

Для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что $(x_n, y_m) -_{n,m\to\infty} \to (x,y)$.

$$|(x_n, y_m) - (x,y)| = |(x_n, y_m) - (x, y_m) + (x, y_m) - (x,y)| \leq$$

$$\leq |(x_n, y_m) - (x, y_m)| + |(x, y_m) - (x,y)| = |(x_n - x, y_m)| + |(x, y_m - y)| \leq$$

$$\leq \{ \text{ неравенство Коши-Буняковского } \} \leq \|x_n - x\| \cdot \|y_m\| + \|y_m - y\| \cdot \|x\|.$$

Устремим в полученном выражении m и n к бесконечности:

$$\|x_n - x\| \cdot \|y_m\| + \|y_m - y\| \cdot \|x\| -_{n,m\to\infty} \to \|x - x\| \cdot \|y\| + \|y - y\| \cdot \|x\| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x_n, y_m) -_{n,m\to\infty} \to (x,y).$$

Таким образом, утверждение доказано.

Задача 6 (лекция 20.02.2006)

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определен случаный процесс $X_t,\ t \in [0,\ +\infty)$, причем $\mathbf{P}\{X_0 = 0\} = 1$; и выбраны произвольные неотрицательные числа $t_0, t_1, \ldots, t_n$, упорядоченные по возрастанию:
$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

Доказать, что для характеристической функции случайного вектора $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ верно равенство

$$\mathbb{E}e^{\,i\sum\limits_{k=1}^{n} u_k X_{t_k}} = \mathbb{E}e^{\,i\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{r=k+1}^{n} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})}. \qquad (6)$$

Доказательство: достаточно показать, что степени экспонент под знаком математического ожидания равны. Докажем это по индукции.
n=1: покажем, что

$$\sum_{k=1}^{1} u_k X_{t_k} = \sum_{k=0}^{0} \sum_{r=k+1}^{1} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \ .$$

Раскроем сумму в правой части равенства. Получим $u_1(X_{t_1} - X_{t_0})$. По условию задачи, $t_0 = 0$, следовательно, $\mathbf{P}\{X_{t_0} = 0\} = 1$ и поэтому выражение в правой части равно $u_1 X_{t_1}$, что, очевидно, совпадает со значением суммы в левой части выражения.

Пусть равенство (6) верно при некотором n.

n→n+1: преобразуем правую часть равенства:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=k+1}^{n+1} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) = \{\text{выделим последнее слагаемое из внешней суммы}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=k+1}^{n+1} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + u_{n+1}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) =$$

$$= \{\text{выделим последнее слагаемое из внутренней суммы}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=k+1}^{n} u_r (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + \sum_{k=0}^{n-1} u_{n+1}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + u_{n+1}(X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k} + u_{n+1} \sum_{k=0}^{n} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) =$$

$$= \{\text{воспользуемся предположением индукции}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_k X_{t_k} + u_{n+1}(X_{t_{n+1}} - X_{t_0}) = \{X_{t_0} = 0\} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k X_{t_k} \ .$$

Т.е. пришли к левой части равенства.
Таким образом, утверждение доказано полностью.

Задача 7 (лекция 13.03.2006)

Пусть $w_t, \ t \in [0, +\infty)$ - случайный процесс.
Доказать, что $\forall \ t_k, \ \upsilon \in [0, +\infty)$ верное следующее равенство:

$$w_{t_k} - w_{\upsilon \wedge t_k} = w_{\upsilon + (t_k - \upsilon)^+} - w_\upsilon, \qquad (7)$$

где $a \wedge b = min(a, b), \ a^+ = max(0, a)$.

Доказательство: достаточно рассмотреть два случая:

1). $t_k \le \upsilon$. Тогда $t_k \wedge \upsilon = t_k$, $(t_k - \upsilon)^+ = 0$. Следовательно, в левой части равенства (7) будет $w_{t_k} - w_{t_k} \equiv 0$, а в правой части $w_\upsilon - w_\upsilon \equiv 0$.

2). $t_k > \upsilon$. Тогда $t_k \wedge \upsilon = \upsilon$, $(t_k - \upsilon)^+ = t_k - \upsilon$. Следовательно, в левой части равенства (7) получим $(w_{t_k} - w_\upsilon)$, а в правой части $w_{\upsilon + t_k - \upsilon} - w_\upsilon \equiv w_{t_k} - w_\upsilon$.

Как нетрудно видеть, в обоих случаях равенство (7) верно.
Утверждение доказано.

Задача 8 (лекция 11.04.2006)

Доказать, что для функции ковариации $k(s,t)$ верно равенство

$$k(s,t) = \mathbb{E}\left[X_s \cdot \overline{X_t}\right] - \mathbb{E}X_s \cdot \mathbb{E}\overline{X_t}\ .$$

Доказательство: по определению ковариационной функции

$$k(s,t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}X_s)(\overline{X_t} - \mathbb{E}\overline{X_t})\right] = \mathbb{E}\left[X_s \cdot \overline{X_t}\right] - \mathbb{E}X_s \cdot \mathbb{E}\overline{X_t} -$$
$$- \mathbb{E}X_s \cdot \mathbb{E}\overline{X_t} + \mathbb{E}X_s \cdot \mathbb{E}\overline{X_t} = \mathbb{E}\left[X_s \cdot \overline{X_t}\right] - \mathbb{E}X_s \cdot \mathbb{E}\overline{X_t}\ .$$

Утверждение доказано.